Numerická kvadratura (integrace): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$

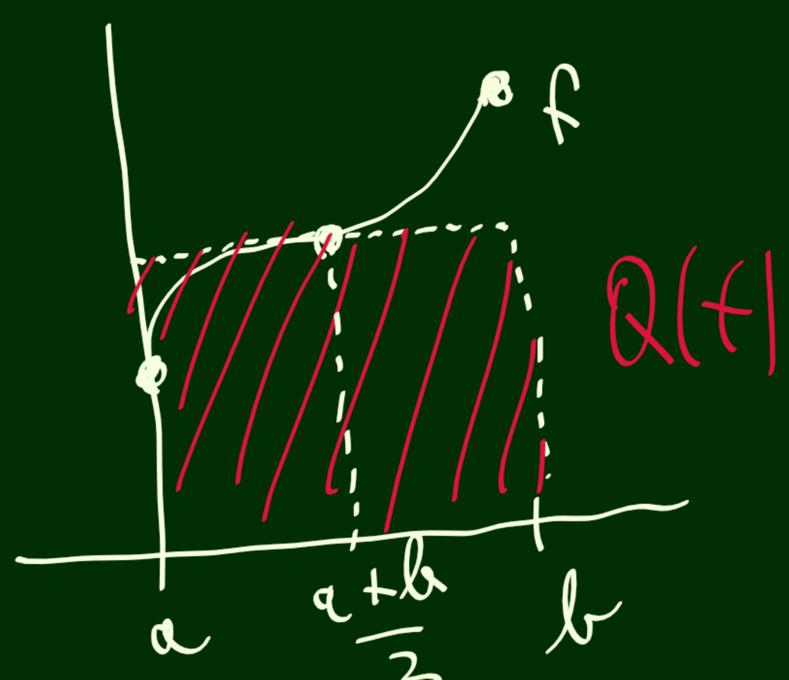
Př: Liouville 1833: e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, x^x – primitivní fci nelze vyjádřit konečnou kombinací elem. fcí.

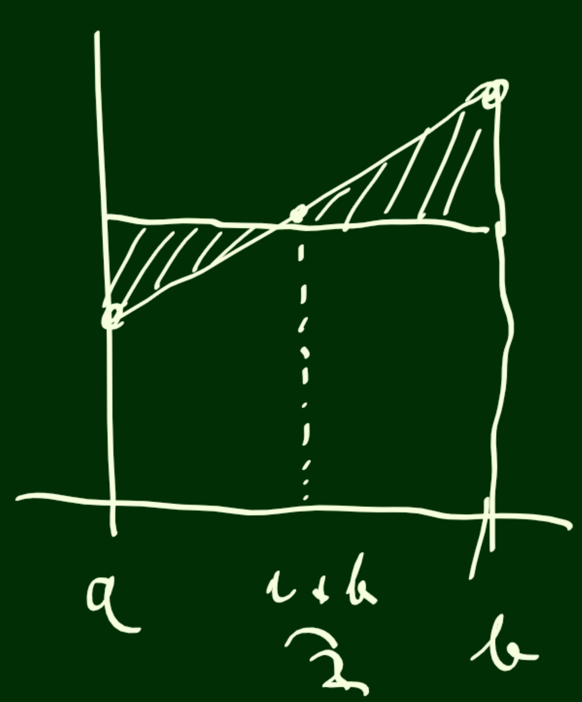
Př: $\frac{x}{1+20\cos x}$ – prim. fce nepraktický složitá.

Aproximujeme: $I(f)\approx Q(f):=\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$

$x_0<x_1<\dots<x_n$ – uzly (obvykle $\in[a,b]$, ne nutně), $w_i\in\mathbb{R}$ – váhy

Př: $I(f)\approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)=:Q_0(f)$ – obdélníkové pravidlo (midpoint rule)





Q_0 přesné pro $f\in P_1$, ale ne $f\in P_2$.

Idea: $f\approx L_n$ = Lagrangeova interp. na $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $Q(f):=\int_a^b L_n(x)\,dx$

- $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,l_i(x)$, kde $l_i(x)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$ $\quad(l_i(x_j)=\delta_{ij})$
- $\int_a^b f(x)\,dx\approx\int_a^b L_n(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\underbrace{\int_a^b l_i(x)\,dx}_{=:w_i}=\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)=:Q(f)$
- Takto definované w_i nezávisí na f.

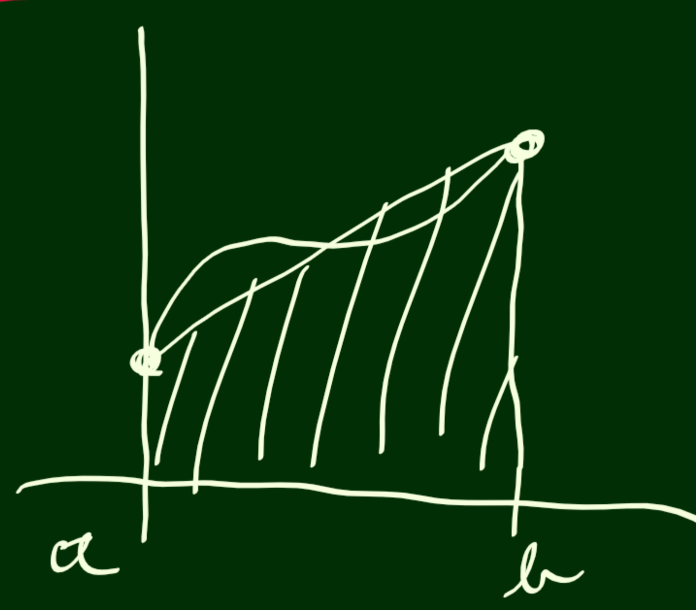
Newton-Cotes: rovnoměrná volba uzlů: $x_i:=a+\frac{i}{n}(b-a)$, $i=0,\dots,n$
$(x_0=a,\ x_n=b)$

Př: 1) $n=1$ … Lichoběžníkové pravidlo: $x_0=a$, $x_n=b$,

$w_0=\int_a^b\frac{x-b}{a-b}\,dx=\frac{1}{a-b}\left[\frac12(x-b)^2\right]_a^b=\frac12(b-a)=w_1$

$\Rightarrow I(f)\approx Q_1(f)=\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Přesné pro $f\in P_1$, ne pro P_2

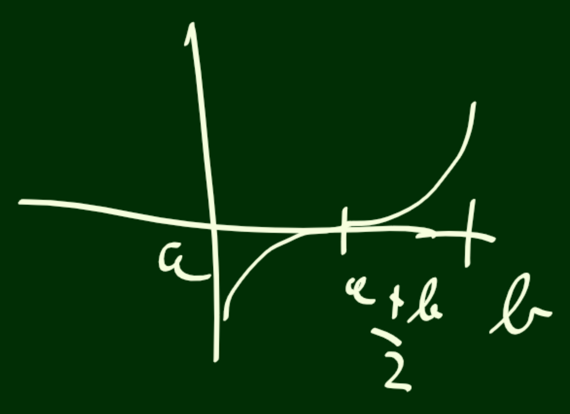


2) $n=2$: Simpsonovo pravidlo: $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$

$$w_0=\int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,dx = \dots = \frac{b-a}{6}, \text{ atd.}$$

$$I(f)\approx Q_S(f)=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Přesné pro P_2, ale i P_3!



Dk: • $\int_a^b \underbrace{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}\,dx = 0$

• $Q_S(f)=\frac{b-a}{6}\left(\underset{=-f(b)}{\cancel{f(a)}}+0+\cancel{f(b)}\right)=0$

• lib. fci $\in P_3$ lze vyjádřit jako $\alpha\underbrace{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}_{f(x)}+\beta x^2+\gamma x+\delta$

– každý z těchto členů Q_S integruje přesně.

3) $n=3$ ... Simpsonovo 3/8-pravidlo ... přesné pro P_3, ne pro P_4.

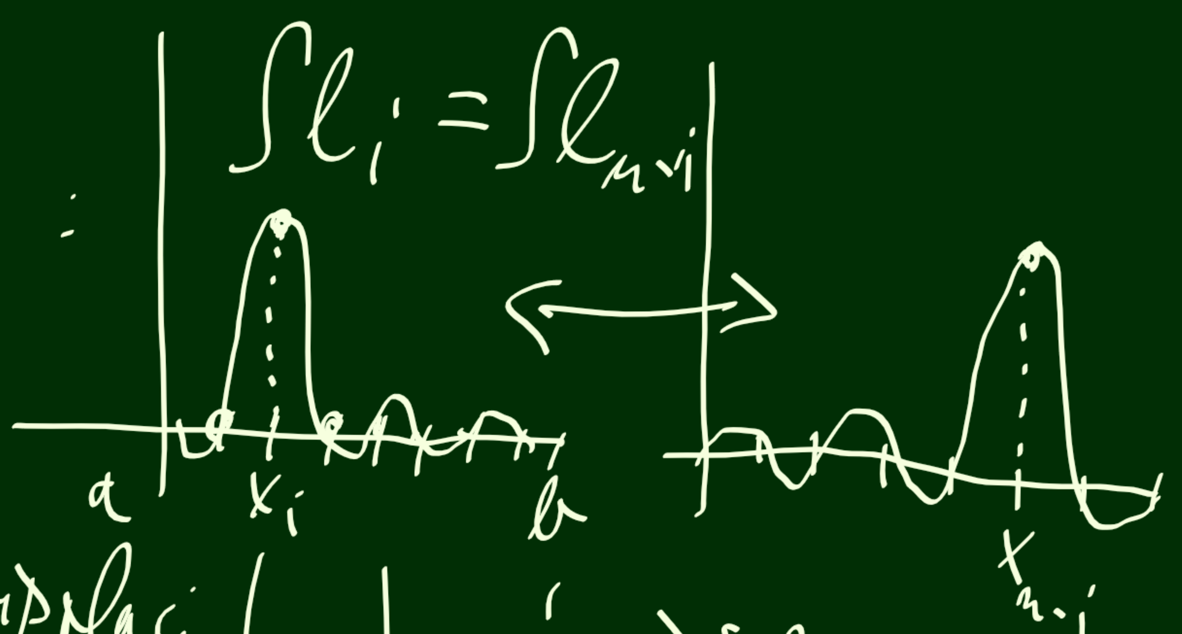
4) $n=4$ ... Booleovo pravidlo ... přesné pro P_5.

Def: $Q(f)$ má (algebraický) řád $N\in\mathbb{N}_0$, pokud $Q(p)=I(p)\ \forall p\in P_N$.

Věta: Newton–Cotes s uzly $x_0,\dots,x_n$ má řád $\begin{cases} n, & n \text{ liché}\\ n+1, & n \text{ sudé}\end{cases}$

Dk: $\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}dx = 0 = Q(f)$

protože $w_i=w_{n-i}$:



Pozn: Kvadraturní formule (založená na Lagrangeově interpolaci L_n) má řád $\geq n$.

Věta (odhad chyby): Q ... kvadratura s obecnými uzly $x_0,\dots,x_n$. Nechť $f\in C^{n+1}[a,b]$.

Pak $$|I(f)-Q(f)|\le \frac{1}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|\int_a^b\left|\prod_{i=0}^n(x-x_i)\right|dx$$

Dk: $$|I(f)-Q(f)|=|I(f)-I(L_n)|=\left|\int_a^b \underbrace{f(x)-L_n(x)}_{\text{odhad - Věta: L. interp.}}\,dx\right|\le$$

$$\le\int_a^b\frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi_x)\right|\left|\prod_{i=0}^n(x-x_i)\right|dx\le\frac{1}{(n+1)!}\max|f^{(n+1)}|\int_a^b\left|\prod(x-x_i)\right|dx$$

max

Důsledek: 1) $$|I(f)-Q_L(f)|\le\frac{1}{12}(b-a)^3\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

Dk: $\int_a^b|x-a|\,|x-b|\,dx=\dots=\frac{(b-a)^3}{6}$

2) $|I(f) - Q_S(f)| \leq \frac{(b-a)^4}{196} \max_{[a,b]} |f^{(4)}|$

Pozn: Simpson na všech a, $\frac{a+b}{2}$, b,

integruje přesně P_3 funkce a, $\frac{a+b}{2}$, b, $x_3 \in [a,b]$

nebere v úvahu, že Q_S přesný pro P_3, pak se dá dok. $|I(f) - Q_S(f)| \leq$

$\leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max |f^{(4)}|$